数理解析研究所講究録
893巻 1995年 128-140

Convergence of circle packing of finie valence to Riemann mapping

京大 理　後藤泰宏
(Gotoh Yasuhiro)

本論文の目標

regular hexagonal packing に対する結果

$f_\varepsilon \rightrightarrows f$ (loc. unif.) …… Rodin-Sullivan

$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows 0$ (〃)

$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$ (〃)

$\Big\}$ Rodin 及び He

を finite valenced packing に対しても示すこと。

証明の方針は regular hexagonal packing の場合と同じであり、regular hexagonal packing に対する証明の紹介は別ページにあるはずなので ここでは idea 上の相異点（次の①, ②）についてのみ紹介する。証明の流れは §1, §2 で紹介する。

① Length-Area-Isoperimetric Ineq. のかわりに（通常の extremal length に関する）Length-Area Method を利用.(§3)

② Schwarz lemma のかわりに. Schwarz Pick lemma を利用 (§4)

Schwarz Pick lemma は Schwarz lemma よりはるかに強力であり、§4 では Schwarz Pick lemma 及びそれを導くのに用いた Perron's Method について紹介する。

§1. Regular hexagonal packing における $f_\varepsilon \rightrightarrows f$, $f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$, $f_{\varepsilon \bar{z}} \rightrightarrows 0$ の証明の復習

記号　P_ε ; 有界単連結領域 Ω 上の、半径 ε の円より成る regular hexagonal packing.

P'_ε ; P_ε に対応する $D=\{|z|<1\}$ 上の (normalized) Andreev packing.

Ω_ε ; P_ε に対応する triangulation の support.

Ω'_ε ; P'_ε 〃

$$S_n = \left(\sup \frac{\mathrm{rad}\, c_j}{\mathrm{rad}\, c_i}\right) - 1,$$

ここで sup は与えられた円 C を中心とする n-generation となっているような任意の hexagonal packing, 及び C と C に接する円 (計7コ) の中の任意の2円の組 (c_i, c_j) について取る。

基本評価

$r_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^+$ を 「$P_\varepsilon \ni C$ の中心 $\longmapsto \dfrac{\mathrm{rad}\, C'}{\mathrm{rad}\, C}$」 の素直な拡張とするとき.

$$|f_{\varepsilon z}| = r_\varepsilon \cdot (1 + O(S_N))$$
$$|f_{\varepsilon \bar{z}}| = r_\varepsilon \cdot O(\sqrt{S_N})$$
$$|\mu_{f_\varepsilon}| = O(\sqrt{S_N})$$

(Ω の各 cpt set K 上 $N = \left[\dfrac{d(K, \partial\Omega)}{2\varepsilon}\right]$)

Rodin-Sullivan による $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ (loc. unif) の証明

(・Ring lemma
・Klein 群論など)

$\Downarrow$

(infinite hexagonal packing の一意性)

$\Downarrow$

Length-Area Ineq

$\Downarrow$

(P_ε' の border circle の半径 $< C\cdot\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \to 0$)

$S_n \to 0 \xRightarrow{\text{基本評価}} \mu_{f_\varepsilon} \rightrightarrows 0$

$\underbrace{\mu_{f_\varepsilon} \rightrightarrows 0 \quad \left(P_\varepsilon' \text{ の border circle の半径} < C\cdot\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \to 0\right)}_{f_\varepsilon \rightrightarrows f}$

Rodin 及び He による $f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$, $f_{\varepsilon \bar z} \rightrightarrows 0$ (loc. unif.) の証明

Schwarz lemma

$\Downarrow$

r_ε: loc unif bdd

$\Downarrow$ ($S_n \to 0$ 基本評価)

$f_{\varepsilon \bar z} \rightrightarrows 0$

$\Downarrow$ (Fefferman-Stein)

$f_{\varepsilon \bar z} \to f$ in BMO

(Length-Area-Isoperimetric Ineq)

$\Downarrow$

(P_ε' の border circle の半径 $< C\cdot\varepsilon^\alpha$)

$\Downarrow$ (Riemann map, q.c. map の distortion estimate)

$\left(\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C\,(S_N + \varepsilon)^\alpha \quad N = \left[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right] \right)$

$S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$\underbrace{\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C\,(S_N + \varepsilon)^\alpha \qquad S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)}_{\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C\cdot\varepsilon^\alpha}$

$\underbrace{f_{\varepsilon \bar z} \to f \text{ in BMO} \qquad \|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C\cdot\varepsilon^\alpha}_{f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'}$

∘ $S_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ は He, 他は Rudin.

§2. Finite valenced packing への一般化

Packing P_ε の仮定

1) P_ε の valence $\leq k_0$ (各 $C \in P_\varepsilon$ が, P_ε の高々 k_0 コの円としか接しないということ.)

2) P_ε の circle の半径 $\leq \varepsilon$

3) $\sup_{z \in \partial\Omega_\varepsilon} d(z, \partial\Omega) \leq \varepsilon$

記号

P_ε', Ω_ε, Ω_ε' f_ε, r_ε は先と同様に定める。

$$S_n = \left(\sup \frac{\mathrm{rad}\, C_j' / \mathrm{rad}\, C_i'}{\mathrm{rad}\, C_j / \mathrm{rad}\, C_i} \right) - 1$$

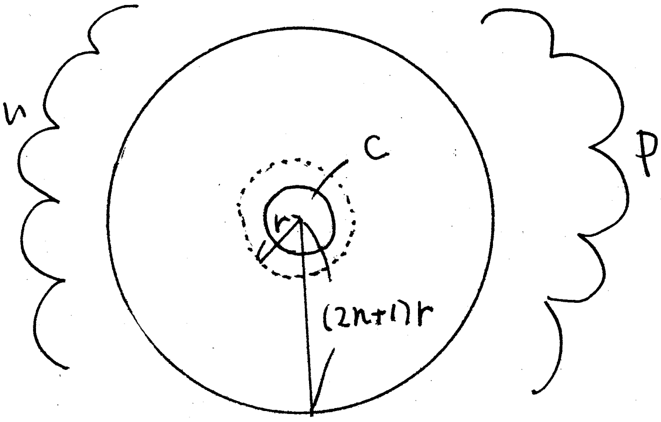
ここで sup は次の条件をみたす Packing P と circle $C \in P$ の組 (P, C) 及び, C と C に接する円 (高々 k_0+1 コ) の中の任意の2円の組 (C_i, C_j) について取る。

1) P の valence $\leq k_0$

2) P の circle の半径 $\leq r$

3) (C と同心, 半径 $(2n+1)r$ の円板) $\subset$ (P の support)

P_ε の circle の半径比を cpt set 上一様に評価することはもはやできないが Ring lemma より f_ε は $K = K(k_0)$ - q.c map であり q.c. map の理論が適用できる。



基本評価

$$|f_{\varepsilon z}| = r_\varepsilon (1 + O(S_N))$$

$$|f_{\varepsilon \bar{z}}| = r_\varepsilon \cdot O(\sqrt{S_N})$$

$$|\mu_{f_\varepsilon}| = O(\sqrt{S_N})$$

(Ω の各 cpt set K 上で $N = \left[\dfrac{d(K, \partial\Omega)}{4\varepsilon} \right]$)

(注) $|f_{\varepsilon z}|$ の評価には $S_n \to 0$ (後出) を用いた。

$f_\varepsilon \rightrightarrows f$ (loc. unif) の証明

$\boxed{S_n = O(\frac{1}{n})}$

基本評価 $\Downarrow$

$\mu_{f_\varepsilon} \rightrightarrows 0$

$\boxed{P'_\varepsilon \text{ の border circle の半径} < C\cdot\varepsilon^\alpha \to 0}$

$f_\varepsilon \rightrightarrows f$

$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$, $f_{\varepsilon \bar{z}} \rightrightarrows 0$ (loc. unif.) の証明

$\boxed{\text{Schwarz-Pick lemma}}$

$\Downarrow$

r_ε : loc. unif bdd

$S_n \to 0$ 基本評価) $\Downarrow$

$f_{\varepsilon \bar{z}} \rightrightarrows 0$

$\Downarrow$ Fefferman-Stein

$f_{\varepsilon z} \to f'$ in BMO

$\boxed{P'_\varepsilon \text{ の border circle の半径} < C\cdot\varepsilon^\alpha \to 0}$

(Riemann map, q.c. map の distortion estimate)

$\Downarrow$

$$\left(\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C(S_N + \varepsilon)^\alpha \quad N = \left[\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\right] \right)$$

$\boxed{S_n = O(\frac{1}{n})}$

$\|f_\varepsilon - f\|_{K,\infty} \leq C \cdot \varepsilon^\alpha$

$f_{\varepsilon z} \rightrightarrows f'$

よって新たに示すべきことは、以下の3つ。

① $S_n = O(\frac{1}{n})$

㋺ P'_ε の border circle の半径 $< C\cdot\varepsilon^\alpha$ (→§3)

㋩ Schwarz-Pick lemma (→§4)

①については、He による hexagonal packing についての証明がそのまま使える。(He-Rodin では He の証明との技術上の相異点が list up してあるだけである。)

§3. P'_ε の border circle の半径 $< C\cdot\varepsilon^\alpha$ なること.

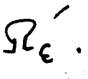
$f_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \Omega'_\varepsilon$ は $z_0 \in \Omega$ が 0 の近くにくるよう normalize してあるものとする。

C : C' の半径が border circle 中最大であるような P の circle
(r : C の半径, r' : C' の半径 とする。)

$\gamma_1 := C \cap \Omega_\varepsilon$

$\gamma_2 := C_0 \cap \Omega_\varepsilon$ の z_0 を含む成分 (C_0 は C と同心で z_0 を通る円)

Γ ; Ω_ε 内で γ_1 と γ_2 を結ぶ curve family

G ; 図の領域  $\subset D$ (= 単位円板)

C の取り方より $G \subset \Omega'_\varepsilon$.

f_ε は C の中心を中心とする star region 上 (scale をかえれば) 一様に bi-Lipschitz なので、

$0 < {}^\exists s < 1$, (C' と同心で半径 sr' の円) $\cap\, G$ は $f_\varepsilon(\gamma_1)$ の内側にある

そこで

$\gamma_1' :=$ (C'と同心で半径 sr' の円) $\cap G$

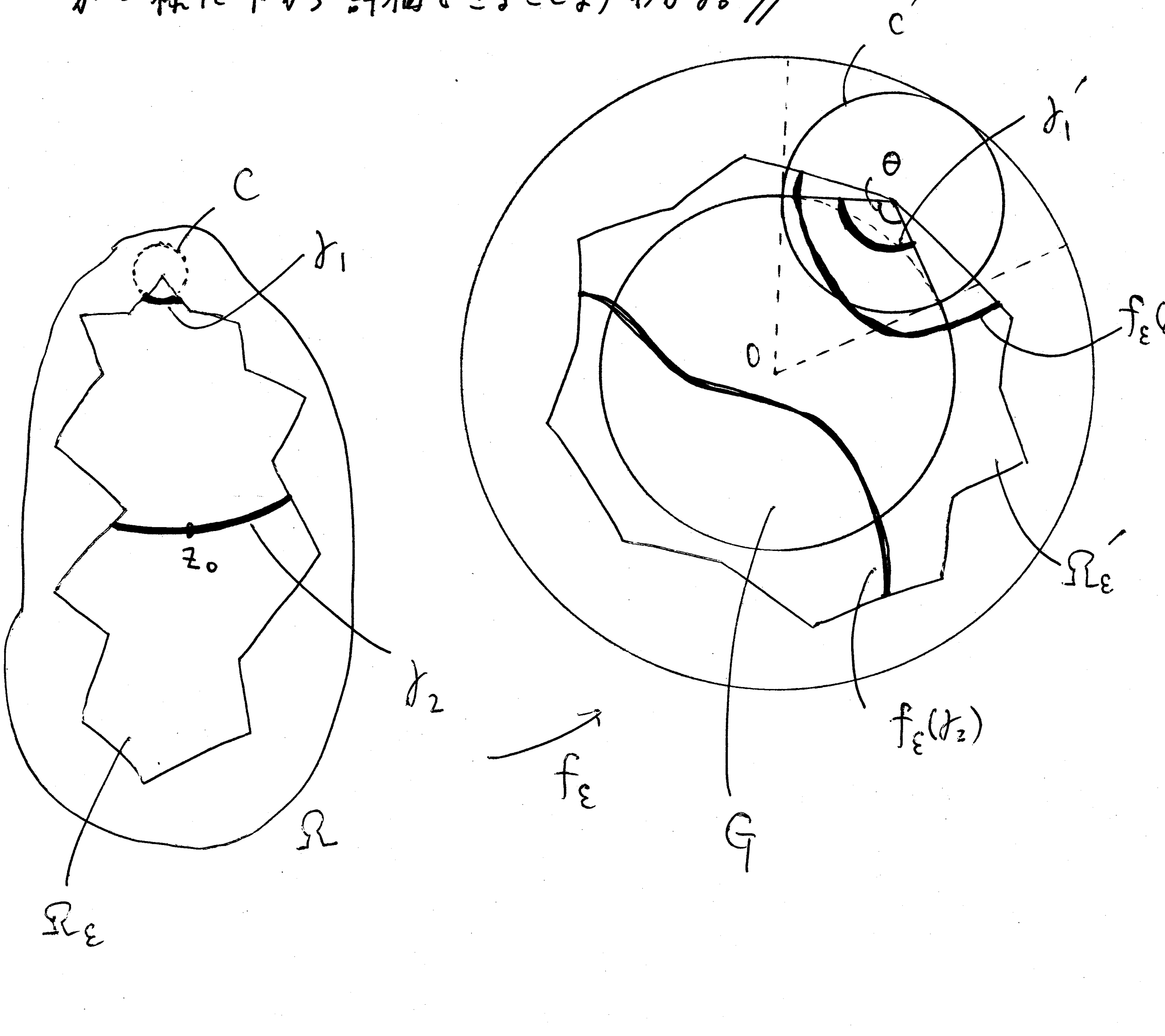
$\Gamma' :=$ G 内で $f_\varepsilon(\gamma_2)$ と γ_1' を結ぶ curve family

$\lambda(\cdot)$; extremal length

として.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log\frac{k}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2\pi}\log\frac{k}{r} \leq \lambda(\Gamma) \leq K\cdot\lambda(f_\varepsilon(\Gamma)) \\ \lambda(f_\varepsilon(\Gamma)) \leq \lambda(\Gamma') \end{cases} \quad (K = K(R_0)).$$

よって $\lambda(\Gamma') \leq K_1 \cdot \log\frac{K_2}{r'}$ なる const $K_1, K_2 > 0$ の取れることをいえばよいが, それは $f_\varepsilon(\gamma_2)$ が原点の十分近くを通ること, 及び, 図の θ が一様に下から評価できることよりわかる。//



§4. Schwarz-Pick lemma (Perron's Method)

記号

K; orientable compact bordered surface の triangulation

V; K の vertex の全体

V_i; K の interior vertex の全体

V_b; K の border vertex の全体

$K(r)$; $r: V \longrightarrow (0, \infty]$ の定める (singularity をもつ) hyperbolic surface.

(r を hyperbolic radius fun. と呼ぶ)

$\mathcal{R} = \{$ hyperbolic radius fun. $\}$

$$\theta_v(r) = \sum_f \theta(v, r, f), \quad v \in V, \ r \in \mathcal{R}$$

ここで Σ は v の star をなす triangule f の全体について取り、$\theta(v, r, f)$ は、f の、structure $K(r)$ に関する v での angle とする。

定義

$r \in \mathcal{R}$ が <u>subpacking</u> とは、 $\theta_v(r) \geqq 2\pi, \quad \forall v \in V_i$

$r \in \mathcal{R}$ が <u>packing</u> とは、 $\theta_v(r) = 2\pi, \quad \forall v \in V_i$

たとえば　r : subpacking, $0 < t \leqq 1 \Rightarrow tr$; subpacking.

$r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ に対し　$r_1 \vee r_2 \in \mathcal{R}$ を

$$r_1 \vee r_2 := \max(r_1, r_2),$$

また $r \in \mathcal{R}$, $v \in V_i$ に対し，$r^v \in \mathcal{R}$ を

$$r^v(u) := \begin{cases} r(u), & u \neq v \\ c & u = v \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} c \text{ は } \theta_v(r^v) = 2\pi \\ \text{として一意に定まる} \\ \text{ところの値} \end{array}\right)$$

とおく。

r^v は「領域内の円板上での関数の値を，その Poisson 積分でおきかえる」ことに対応していると考えられる。

<u>補題</u>

① r_1, r_2 : subpacking $\Rightarrow$ $r_1 \vee r_2$; subpacking

② r : subpacking, $v \in V_i$ $\Rightarrow$ r^v : subpacking で $r^v(v) \geq r(v)$

③ r : subpacking, $v \in V_b$, $c \geq r(v)$ に対し

$$r'(u) = \begin{cases} r(u) & u \neq v \\ c & u = v \end{cases}$$

は subpacking.

これらは次の事実からわかる。

『$v \in V_i$, $r \in \mathcal{R}$ において　$r(v)$ の値のみ大きくしてゆけば

- $\theta(v)$ の値は狭義単調に減少する
- v にとなりあう vertex u においては $\theta(u)$ は狭義単調に増加する。』

定義

subpacking の族 $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$ が Perron 族 とは、

① $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$

② $r \in \mathcal{R}_0,\ v \in V_i \Rightarrow r^v \in \mathcal{R}_0$

③ $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_0 \Rightarrow r_1 \vee r_2 \in \mathcal{R}_0$

補題より、subharmonic fun. に対する Perron's Method の証明がそのまま適用でき

定理 (Perron's Method)

$\mathcal{R}_0$ が Perron 族 ならば

$$\tilde{r}(u) = \sup_{r \in \mathcal{R}_0} r(u),$$

として $\tilde{r}$ は packing となる。

ただし、subharmonic. fun. の Perron 族では「恒等的に $+\infty$」なる関数が生じることもあったが今の設定では、そうはならない。

というのは

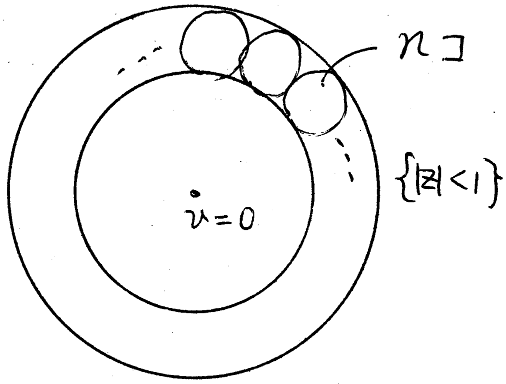
「r : subpacking, $v \in V_i$, $n = $ (v の star をなす triangle のコスウ)

とするとき、$r(v) \leq \sqrt{n}$」

∵ v の star をなす subpacking についてのみ示せば十分。

必要なら $r(v)$ の値を大きく取りかえて packing としてよい。

u を v 以外の vertex とする。$r(u)$ を大きく取りかえると、$\theta(v)$ の値は大きくなるので packing となるように $r(v)$ の値を調節すれば $r(v)$ の値は大きくなる。よって $r(u)=\infty$ とすれば $r(v)$ は最大となる。
よって v 以外のすべての vertex u に対し $r(u)=\infty$ なるときに $r(v)$ は最大。あとは $v=0$ となる $\{|z|<1\}$ なる hyperbolic surface の model 上で考えてみればよい。（図参照）//



以下では Perron's Method を Dirichlet 問題に応用する。

$g: V_b \to (0, \infty]$ が与えられたとき

$$\mathcal{R}_0 = \{ r \in \mathcal{R} \mid r: \text{subpacking},\ r(v) \leq g(v),\ {}^\forall v \in V_b \}$$

として

<u>定理</u>
$\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ ならば $\mathcal{R}_0$ は Perron 族であり $\hat{r}$ は $\hat{r}|V_b = g$ をみたすただひとつの packing である。

☺ 一意性以外の主張は補題より O.K. 一意性のみ示す。

r を条件をみたす他の packing とすると. $\tilde{r}(v) \geq r(v),\ v \in V$

より $\mathrm{Area}_{\tilde{r}}(K) \geqq \mathrm{Area}_r(K)$, かつ $\theta_v(\tilde{r}) \geqq \theta_v(r),\ v \in V_b$

ここで

$$\begin{cases} N = K \text{ の triangle のコスウ} \\ p = \# V_i \end{cases}$$

として

$$\mathrm{Area}_{\tilde{r}}(K) = (N-2p)\pi - \sum_{v \in V_b} \theta_v(\tilde{r})$$

$$\mathrm{Area}_r(K) = (N-2p)\pi - \sum_{v \in V_b} \theta_v(r)$$

よって $\sum_{v \in V_b} \theta_v(r) \geqq \sum_{v \in V_b} \theta_v(\tilde{r})$ となり $\theta_v(r) = \theta_v(\tilde{r}),\ v \in V_b$

であり $\mathrm{Area}_{\tilde{r}}(K) = \mathrm{Area}_r(K)$. よって $r = \tilde{r}$ をうる。

特に K が closed disk の triangulation であれば, どのような

$g : V_b \to (0, \infty]$ に対しても $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ なので

(☺ 十分小さい $t > 0$ に対し $\{|z| < t\}$ での K の Andreev packing を hyperbolic surface の model $\{|z| < 1\}$ にうめこめばよい。)

<u>系</u>

K : closed disk の triangulation

$g : V_b \to (0, \infty]$

$\Rightarrow$ $r|V_b = g$ なる packing r がただひとつ存在する。

さらに $g \equiv \infty$ とすれば K の任意の packing は $\mathcal{R}_0$ の元なので

系 (Schwarz-Pick lemma for circle packing)

K; closed disk の triangulation

r_a; K の Andreev packing

r; K の任意の packing

$$\Rightarrow \quad r(v) \leq r_a(v) \quad \forall v \in V$$

$$\mathrm{Area}_r(f) \leq \mathrm{Area}_{r_a}(f), \quad \forall f: \text{triangle}$$

また ある $v \in V_i$ (or ある f: triangle) で等号が成立すれば r は Andreev packing r_a に一致する。

∵ 一意性のみ示せばよいが、一般に 2つの packing r_1, r_2 $r_1 \leq r_2$ について ある $v \in V_i$ で $r_1(v) = r_2(v)$ となれば $r_1 = r_2$ なることより O.K. f についても同様 //

[参考文献]

[1] Zheng-Xu He and Burt Rodin, Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mappings, Comm. in Analysis and Geometry 1 (1993) 31-41.

(Schwarz-Pick lemma については)

[2] Alan F. Beardon and Kenneth Stephenson, The Schwarz-Pick lemma for circle packings, Ill. J. Math. 141 (1991), 577-606.